

文字式を利用した説明

◆例題◆

偶数と奇数の和は奇数であることを説明しなさい。

[解説]

このような問題の場合、次のような解答は間違いになります。

例えば、偶数である2と奇数である3を足すと5になる。
同じようにして、偶数である4と奇数である7を足すと11になる。
5も11も奇数なので、偶数と奇数を足すとその和は奇数となると
いえる。

このような問題は、「全ての場合がこうなる」ということを示す必要があります。よって、例をあげての説明では間違いになります。そこで、全ての場合がこうなるという説明を行うには、「文字式」を利用します。

《文字式の使い方》

1. 偶数、奇数を文字式で表すには、例えば m , n を整数と仮定すると、偶数は $2m$ 、奇数は $2n+1$ となる。
2. 連続する3つの整数は、そのうちの最も小さい整数を n とすると、連続する3つの整数は n , $n+1$, $n+2$ と表される。また、中央の整数を n とすると、連続する3つの整数は、 $n-1$, n , $n+1$ と表される（この方が計算が簡単になる）。
3. 2けたの自然数は、十の位の数 a 、一の位の数 b とすると、 $10a+b$ で表される。

以上のことをふまえて答案を作成しましょう。

[解答]

m , n を整数とすると、偶数は $2m$ 、奇数は $2n+1$ となる。
これらの和は $2m+2n+1=2(m+n)+1$ となり、 $m+n$ は整数なので、 $2(m+n)$ は偶数となり、これに1を足すかたちになるので、奇数となる。よって、偶数と奇数の和は奇数になるといえる。

問 1. 連続する 3 つの整数の和は 3 の倍数であることを、文字式を使って説明しなさい。

問 2. 2 けたのある自然数と、その十の位の数と一の位の数を入れかえてできる 2 けたの自然数との和は 11 の倍数であることを説明しなさい。

問3. 連続する5つの整数の和は5の倍数であることを、中央の整数を n として説明しなさい。

問4. 3つの奇数の和は、奇数であることを説明しなさい。

問5. 偶数と奇数の積が偶数になることを説明しなさい。

問6. おうぎ形の弧の長さを m 、半径を r とすると、面積 S は $S = \frac{1}{2} m r$ と表されることを説明しなさい。[発展]

問7. 各位の数字の和が9の倍数である整数は、9の倍数になることを
3けたの整数に関して説明しなさい。〔 発展 〕

問 1. 連続する 3 つの整数の和は 3 の倍数であることを、文字式を使って説明しなさい。

＜解答＞

連続する 3 つの整数のうち、最も小さい整数を n とすると、
連続する 3 つの整数は $n, n+1, n+2$ と表される。

これらの和は

$$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1) \text{ となり、}$$

$n+1$ は整数なので、 $3(n+1)$ は 3 の倍数である。

よって、連続する 3 つの整数の和は 3 の倍数であるといえる。

**問 2. 2 けたのある自然数と、その十の位の数と一の位の数を入れかえて
できる 2 けたの自然数との和は 11 の倍数であることを説明しなさい。**

＜解答＞

2 けたの自然数は十の位の数を a 、一の位の数を b とすると、
 $10a + b$ で表される。この自然数の十の位の数と一の位の数を
入れかえた自然数は $10b + a$ と表される。

この 2 つの和は

$$10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$$

となり、 $a + b$ は整数なので 11 の倍数となる。

※補足説明

2 けたの自然数で十の位の数を a 、一の位の数を b とすると、 $10a + b$ で表される。

例えば 97 を表す場合、十の位の数 a は 9、一の位の数 b は 7 で、9 は十の位なので

$9 \times 10 = 90$ のように 10 倍し、7 は一の位なのでそのまま加えて、

$90 + 7 = 97$ と考えることができる。よって、 $10a + b$ と考えることができる。

同様に 3 けた自然数では、百の位を a 、十の位の数を b 、一の位の数を c とすると、

$100a + 10b + c$ と表される。

問3. 連続する5つの整数の和は5の倍数であることを、中央の整数を n として説明しなさい。

＜解答＞

連続する5つの整数のうち、中央の整数を n とすると、連続する5つの整数は $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ と表される。

これらの和は

$$(n-2) + (n-1) + n + (n+1) + (n+2) = 5n \text{ となり、}$$

n は整数なので、5の倍数となる。

よって、連続する5つの整数の和は5の倍数であるといえる。

問4. 3つの奇数の和は、奇数であることを説明しなさい。

＜解答＞

3つの奇数を整数 m, n, p を用いて表すと、それぞれ $2m+1, 2n+1, 2p+1$ となる。

これらの和は

$$(2m+1) + (2n+1) + (2p+1) = 2(m+n+p+1) + 1 \text{ となり、}$$

$(m+n+p+1)$ は整数なので $2(m+n+p+1)$ は偶数となり、

これに1を足すので奇数となる。

よって、3つの奇数の和は奇数であるといえる。

問5. 偶数と奇数の積が偶数になることを説明しなさい。

＜解答＞

偶数を整数 m を用いて表すと $2m$ 、
奇数を整数 n を用いて表すと $2n+1$ となる。
この二つの積は
 $2m \times (2n+1) = 4mn + 2m = 2(2mn+m)$ となり、
 m, n は整数なので、 $(2mn+m)$ は整数となり、
 $2(2mn+m)$ は偶数となる。
よって、偶数と奇数の積は偶数になる。

問6. おうぎ形の弧の長さを m 、半径を r とすると、面積 S は $S = \frac{1}{2}mr$ と表されることを説明しなさい。[発展]

＜解答＞

おうぎ形の中心角を a とすると、

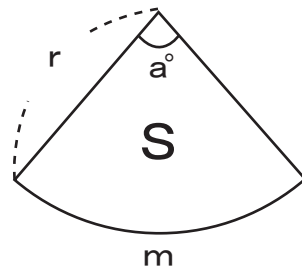
$$m = 2r\pi \times \frac{a}{360} \cdots (1)$$

$$S = r^2\pi \times \frac{a}{360} \cdots (2)$$

(1)、(2)に共通の $\frac{a}{360}$ に合わせて(1)を整理すると、

$$\frac{a}{360} = \frac{m}{2\pi r} \text{ となり、これを(2)に代入すると、}$$

$$S = r^2\pi \times \frac{m}{2\pi r} = \frac{1}{2}mr \text{ となる。}$$



問7. 各位の数字の和が9の倍数である整数は、9の倍数になることを3けたの整数に関して説明しなさい。[発展]

＜解答＞

3けたの整数のうち、百の位の数を a 、十の位の数を b 、一の位の数を c とすると、3けたの整数は $100a + 10b + c$ と表される。

また、「各位の数字の和が9の倍数である整数」とあるので

$a + b + c$ は9の倍数である。これを利用すると、

$100a + 10b + c = (a + b + c) + 99a + 9b$ となり、9の倍数となる。